Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 26.09.2014.

Diferencijalna geometrija, pismeni ispit

Važno: Obavezno napisati formulu koju koristite i značenja simbola iz napisane formule, u sva četri zadatka. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. (50%) (a) Pronaći i skicirati krivu čiji je parametarski oblik (i) $x = e^t$, $y = e^{-t}$; (ii) $x = \sqrt{1-t}$, $y = \dfrac{1}{t}$.

(50%) (b) Pokazati da kriva $\vec{r} = (\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t)$ leži u presjeku dvije površi i odrediti jednačine tih površi.

2. Naći jednačinu normalne ravni u proizvoljnoj tački krive

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

3. Na površi $\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, \frac{1}{2}u^2)$ data je kriva $v = ku$.

(a) Ispitati oblik ove krive i objasniti šta je projekcija te krive na xOy ravan.

(b) Odrediti dužinu luka ove krive od koordinatnog početka do proizvoljne tačke $u = t$.

4. Odrediti geodeziske linije površi $\vec{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$.

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

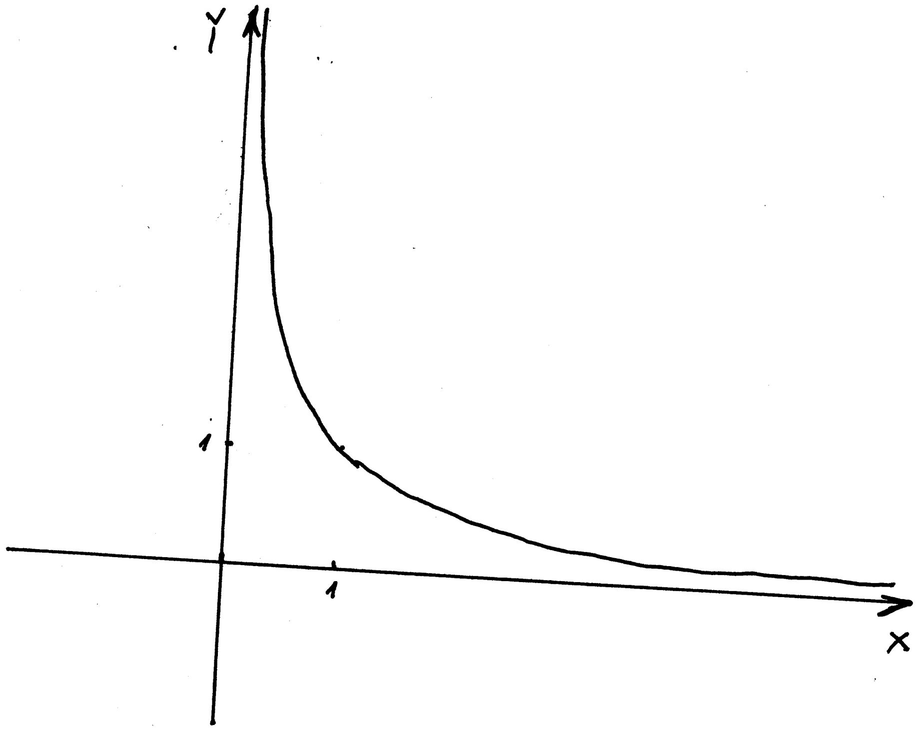
(#) Pronaći i skicirati krivu čiji je parametarski oblik

(a) $x = e^t, \ y = e^{-t};$ (b) $x = \sqrt{1-t}, \ y = \frac{1}{t};$

Rj.-upute:

(a)

$xy = 1, \quad x > 0$



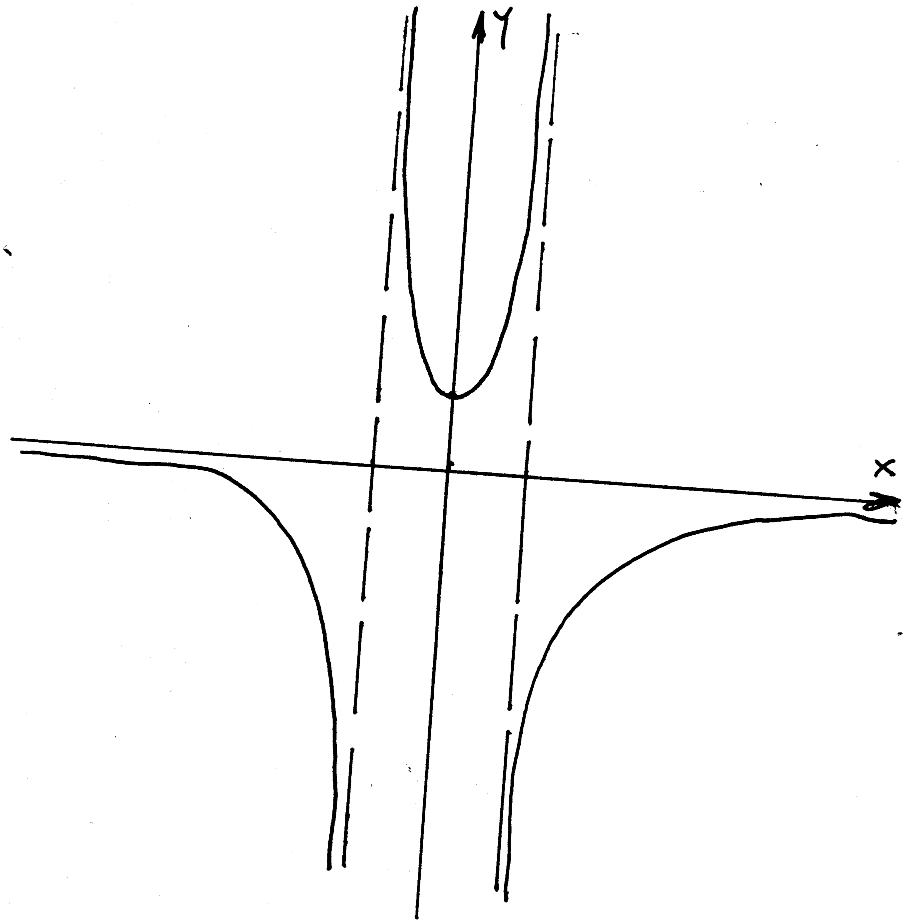
(b)

$x^2 = 1 - t$

$t = (y)^{-1}$

$y = (1 - x^2)^{-1}, \quad x \neq 1$

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$



(#) Data je kriva $\vec{r} = (\sin^2 t, \sin t \cos t, \cos t)$. Pokazati da kriva leži u presjeku dvije površi i odrediti jednačine tih površi.

Rj: Parametarske jednačine date krive su

$$x = \sin^2 t, \quad y = \sin t \cos t, \quad z = \cos t.$$

Eliminišimo parametar t iz prve dvije jednačine.

$$y^2 = \sin^2 t \cos^2 t = \sin^2 t(1 - \sin^2 t) = \sin^2 t - \sin^4 t = x - x^2$$

a iz sve tri jednačine

$$y^2 + z^2 = \sin^2 t \cos^2 t + \cos^2 t = \sin^2 t - \sin^4 t + \cos^2 t =$$
$$= 1 - \sin^4 t = 1 - x^2$$

Dakle

$$x^2 + y^2 - x = 0 \qquad \ldots (1)$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \ldots (2)$$

Prema tome, presjek cilindra određenog jednačinom (1) sa sferom određenom jednačinom (2) daje datu krivu $\vec{r}$. Data kriva je Vivijanijeva kriva.

Naći jednačinu normalne ravni u proizvoljnoj tački krive

$$x^2+y^2-z^2=1, \qquad x^2-y^2-z^2=1.$$

Rj.

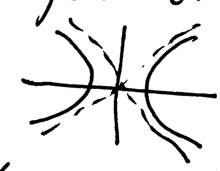
Data je kriva $\vec{r}: \begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x^2-y^2-z^2=1 . \end{cases}$

Ako se na neki način riješim y-na dobiću ortogonalnu projekciju krive na xOz ravan.

$$\begin{array}{rl} & x^2+y^2-z^2=1 \\ + & x^2-y^2-z^2=1 \\ \hline & 2x^2-2z^2=2 \ /:2 \end{array}$$

$$x^2-z^2=1$$

ortogonalna projekcija date krive na xOz ravan.
Parametrizirajmo ovu krivu.
Prepoznajemo da je ovo jednačina hiperbole u xOz ravni



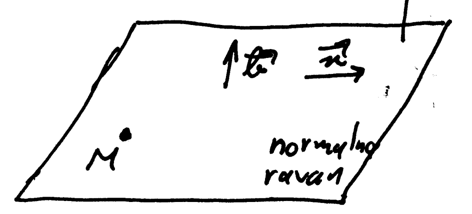
Parametarski oblik jedinične hiperbole je $ch^2 t - sh^2 t = 1$,

tj. $x = ch\, t$
$z = sh\, t$ (od ranije znamo $ch^2 t - sh^2 t = 1$)

$$\Rightarrow \quad y = z^2 - x^2 + 1 = -(x^2 - z^2 - 1) = -(ch^2 t - sh^2 t - 1) = 0$$

Parametarski oblik date krive je

$$\vec{r}: \begin{cases} x = ch\, t \\ y = 0 \\ z = sh\, t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Normalnu ravan određuju tačka M na krivoj, vektori $\vec{t}$ i $\vec{n}$.

$\vec{r} = (\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$

$\dot{\vec{r}} = (\text{sh}\,t, 0, \text{ch}\,t)$

$\ddot{\vec{r}} = (\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{sh}\,t & 0 & \text{ch}\,t \\ \text{ch}\,t & 0 & \text{sh}\,t \end{vmatrix} = (0, \text{sh}^2 t - \text{ch}^2 t, 0)$$

$$= (0, -1, 0)$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ \text{sh}\,t & 0 & \text{ch}\,t \end{vmatrix} = (-\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$$

$\vec{t} = (\text{sh}\,t, 0, \text{ch}\,t)$

Proizvoljna tačka na krivoj je $M(\text{ch}\,t, 0, \text{sh}\,t)$

$$\underline{\dot{x}(x - x_1) + \dot{y}(y - y_1) + \dot{z}(z - z_1) = 0}$$ jednač. norm. ravni u tački (x_1, y_1, z_1)

$$\text{sh}\,t(x - \text{ch}\,t) + 0(y - 0) + \text{ch}\,t(z - \text{sh}\,t) = 0$$

$$\text{sh}\,t\; x + \text{ch}\,t\; z - 2\,\text{sh}\,t\,\text{ch}\,t = 0$$

jednačina tražene normalne ravni

ako gornju jednačinu podijelimo sa $\text{sh}\,t$ dobijemo

$$x + \text{ctgh}\; z - 2\,\text{ch}\,t = 0$$

(#) Na površi $\vec{r}=(u\cos v, u\sin v, \frac{1}{2}u^2)$ data je kriva $v=ku$.

(a) Ispitati oblik ove krive i objasniti šta je projekcija te krive na xOy ravan.

(b) Odrediti dužinu luka ove krive od koordinatnog početka do proizvoljne tačke $u=t$.

Rj: (a) Primjetimo da za datu krivu vrijedi $x^2+y^2=2z$.

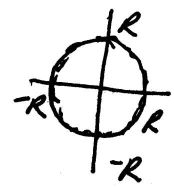
Odavde možemo primjetiti da kriva pripada površi koja nastaje rotacijom parabole $2z=x^2, y=0$ oko z-ose.

Dalje, prisjetimo se polarnih koordinata za xOy ravan:

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

Ako je ρ fiksirano (npr $\rho=R$) a φ uzima vrijednosti od 0 do 2π kao rezultat dobijamo krug

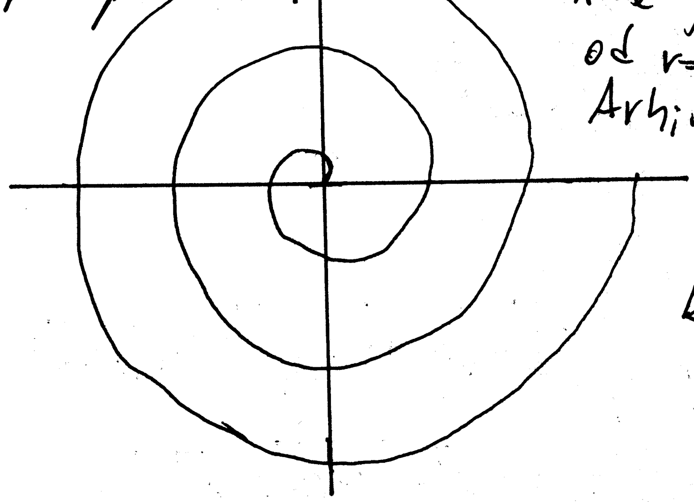


U našem slučaju ako posmatramo x i y koordinate imamo

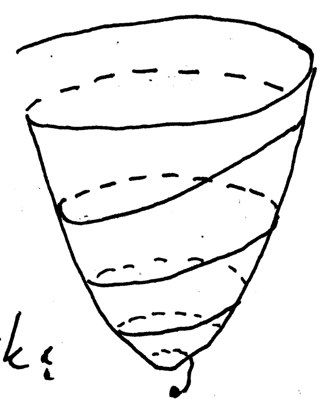
$x=u\cos ku$

$y=u\sin ku$

Odavde možemo zaključiti da ako se ugao mijenja to se mijenja i poluprečnik.



Time je projekcija od $v=ku$ na xOy ravan Arhimedova spirala.



kriva u prostoru ima oblik:

b) Umjesto promjenjive u posmatrajmo promjenjivu t. Tada je data kriva

$$\vec{r} = \left(t\cos kt,\ t\sin kt,\ \tfrac{1}{2}t^2\right).$$

$(\vec{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ \tfrac{1}{2}u^2)$ je data površ)

Prisjetimo se:

Dužina luka krive na površi od tačke $A(t=t_1)$ do tačke $B(t=t_2)$ računamo po formuli

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$E = (\vec{r}_u')^2 = u^2+1 \qquad \frac{du}{dt} = 1,\quad \frac{dv}{dt} = k$$

$$F = \vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v' = 0$$

$$G = (\vec{r}_v')^2 = u^2 \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 1,\quad \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) = k,\quad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = k^2$$

Dužina luka od 0 do $t=\lambda$ je

$$s = \int_0^\lambda \sqrt{t^2+1+t^2k^2}\, dt = \int_0^\lambda \sqrt{1+(1+k^2)t^2}\, dt = \sqrt{1+k^2}\int_0^\lambda \sqrt{\frac{1}{1+k^2}+t^2}\, dt$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{uvedimo oznaku} \\ \gamma = \dfrac{1}{1+k^2} \Rightarrow \sqrt{1+k^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^\lambda \sqrt{\gamma+t^2} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{t}{2}\sqrt{\gamma+t^2}\Big|_0^\lambda + \frac{\gamma}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\gamma}\right|\Big|_0^\lambda\right) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\gamma}}\sqrt{\gamma+\lambda^2} + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\ln\left|\lambda+\sqrt{\lambda^2+\gamma}\right|$$

$$-\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\ln\sqrt{\gamma} = \ldots = \frac{\sqrt{1+k^2}\,\lambda}{2}\sqrt{1+(1+k^2)\lambda^2} + \frac{1}{2}\ln\left[\lambda\sqrt{1+k^2}+\sqrt{1+(1+k^2)\lambda^2}\right].$$

(#) Odrediti geodezijske linije na površ

$$\vec{r}=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$$

Rj. Prisjetimo se:
Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.
Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n}\cdot(d\vec{r}\times d^2\vec{r})=0$$

tj.

$$(\vec{r}_u'\times\vec{r}_v')\cdot(d\vec{r}\times d^2\vec{r})=0.$$

$\vec{r}_u'=(\cos v,\sin v,0)$ $\qquad E=\vec{r}_u'^2=1$

$\vec{r}_v'=(-u\sin v,\ u\cos v,\ a)$ $\qquad F=\vec{r}_u'\cdot\vec{r}_v'=0$

$\qquad G=\vec{r}_v'^2=u^2+a^2$

$$\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \cos v&\sin v&0\\ -u\sin v&u\cos v&a\end{vmatrix}=(a\sin v,-a\cos v,u)$$

$d\vec{r}=\vec{r}_u'du+\vec{r}_v'dv$ $\qquad d\vec{r}=(\cos v\,du-u\sin v\,dv,\ \sin v\,du+u\cos v\,dv,\ a\,dv)$

$\vec{r}_{uu}''=(0,0,0)$ $\quad /\cdot du^2$

$\vec{r}_{uv}''=(-\sin v,\cos v,0)$ $\quad /\cdot 2du\,dv$ $\qquad d^2\vec{r}=\vec{r}_{uu}''du^2+2\vec{r}_{uv}''du\,dv$

$\vec{r}_{vv}''=(-u\cos v,-u\sin v,0)$ $\quad /\cdot dv^2$ $\qquad +\vec{r}_{vv}''dv^2$

$$d^2\vec{r} = (-2\sin v\, du\, dv - u\cos v\, dv^2,$$

$$2\cos v\, du\, dv - u\sin v\, dv^2, 0)$$

$$d\vec{r} \times d^2\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v\, du - u\sin v\, dv & \sin v\, du + u\cos v\, dv & a\, dv \\ -2\sin v\, du\, dv - u\cos v\, dv^2 & 2\cos v\, du\, dv - u\sin v\, dv^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = (-a\, dv^2(2du\cos v - u\sin v\, dv),$$

$$-a\, dv^2(2\sin v\, du + u\cos v\, dv),$$

$$2du^2\, dv + dv^3 u^2)$$

$$\vec{n}\cdot(d\vec{r} \times d^2\vec{r}) = \dots = u\, dv\,(a^2 dv^2 + 2du^2 + u^2 dv^2)$$

Time smo dobili diferencijalnu jednačinu

$$u\, dv\,(a^2 dv^2 + 2du^2 + u^2 dv^2) = 0$$

(a) $dv = 0$

$v = k$, k - konstanta

(b)

$$u\,((u^2+a^2)\, dv^2 + 2du^2) = 0 \quad /:u$$

$$(u^2+a^2)\, dv^2 = -2du^2$$

$$dv^2 = \frac{-2}{u^2+a^2} du^2$$

$$dv = \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{a^2+u^2}} du$$

$$v = 2i \ln|u + \sqrt{u^2+a^2}| + C$$

Geodezijske linije ~~na~~ data površ su

$$\vec{r}_1 = (u\cos k, u\sin k, ak)$$

i

$$\vec{r}_2 = (u\cos(2i\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| + C),$$

$$u\sin(2i\ln|u+\sqrt{a^2+a^2}| + C), a2i\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| + C)$$